Mereológiai áttekintés

Simonyi András

2006. szeptember 10.

1. Mereológiai axiómák

A mereológiainak nevezett relációk sokfélesége miatt nyilván nem adható meg olyan axiomatizáció, mely az összes relációt *kimerítően* jellemezné, mindazonáltal megpróbálhatjuk felsorolni azokat az axiómákat, melyek sok (ha nem is az összes) részrelációra teljesülnek. Az természetesen már ontológiai elkötelezettség kérdése, hogy az egyes részrelációkat egy átfogó részreláció „alfajainak" gondoljuk-e.

A tipikus axiómák első csoportját a *részbenrendezési* axiómák képezik:

$$x\mathbf{P}x \tag{1}$$

$$x\mathbf{P}y \wedge y\mathbf{P}x \rightarrow y = x \tag{2}$$

$$x\mathbf{P}y \wedge y\mathbf{P}z \rightarrow x\mathbf{P}z \tag{3}$$

A továbbiakhoz definiáljuk a valódi rész, az átfedés, a fedés és az atom fogalmát:

$$x\mathbf{PP}y \Leftrightarrow_{df} x\mathbf{P}y \wedge x \neq y \tag{4}$$

$$x\mathbf{O}y \Leftrightarrow_{df} \exists z(z\mathbf{P}x \wedge z\mathbf{P}y) \tag{5}$$

$$x\mathbf{U}y \Leftrightarrow_{df} \exists z(x\mathbf{P}z \wedge y\mathbf{P}z) \tag{6}$$

$$\mathbf{A}x \Leftrightarrow_{df} \neg\exists y(y\mathbf{PP}x) \tag{7}$$

A legfontosabb, a részbenrendezettségen túlmenő mereológiai sajátosságot a *kiegészítési* axiómák fogalmazzák meg:

$$x\mathbf{PP}y \rightarrow \exists z(z\mathbf{PP}y \wedge \neg z\mathbf{O}x) \tag{8}$$

$$\neg x\mathbf{P}y \rightarrow \exists z(z\mathbf{P}x \wedge \neg z\mathbf{O}y) \tag{9}$$

(**??**) az ún. *gyenge kiegészítés* elvét fogalmazza meg: ha x y valódi része, akkor y-nak van x-től diszjunkt része. Ennél többet állít (**??**), az *erős kiegészítés* axiómája, mely szerint ha x nem része y-nak, akkor x-nek van y-ból „teljesen kilógó" része.

(**??**) következik (**??**)-ből, fordítva azonban ez nincsen így, mert (**??**)-ből és a részbenrendezésből következik az *extenzionalitás* elve:

$$\neg\mathbf{A}x \wedge \forall z(z\mathbf{PP}x \leftrightarrow z\mathbf{PP}y) \rightarrow x = y \tag{10}$$

az viszont könnyen látható, hogy egy olyan modell, mely pontosan 4 individuumból áll, ahol az első kettő valódi része a 3.-nak és a 4.-nek is, az modellje a részbenrendezési axiómáknak és a gyenge kiegészítésnek, de nem teljesíti az extenzionalitást.

A további tipikus axiómák a (bináris) mereológiai összeg, szorzat (metszet) és különbség létezését mondhatják ki:

$$x\mathbf{U}y \to \exists z \forall v(v\mathbf{O}z \leftrightarrow v\mathbf{O}x \vee v\mathbf{O}y) \tag{11}$$
$$x\mathbf{O}y \to \exists z \forall v(v\mathbf{P}z \leftrightarrow v\mathbf{P}x \wedge v\mathbf{P}y) \tag{12}$$
$$\exists z(z\mathbf{P}x \wedge \neg z\mathbf{O}y) \to \exists z \forall v(v\mathbf{P}z \leftrightarrow v\mathbf{P}x \wedge \neg v\mathbf{O}y) \tag{13}$$

Az extenzionalitás feltevése mellett az összeg, a szorzat és a metszet egyértelmű, tehát bevezethetők az ezeket képző '$+$', '$\times$' és '$\setminus$' műveletek. Ha feltesszük egy olyan U „univerzum" létezését, melynek minden része, vagyis

$$\forall x(x\mathbf{P}U) \tag{14}$$

(az antiszimmetria miatt csak egy ilyen individuum lehet) akkor definiálható a komplementer is (U-nak nem, de minden másnak lesz komplementere, ha (**??**) teljesül):

$$\sim x =_{df} U \setminus x \tag{15}$$

U létezése természetesen garantálja tetszőleges két individuum összegének létezését is, hiszen az univerzum bármely két objektumot lefedi.

Az összeg és a szorzat reláció művelete általánosítható tetszőleges számú individuumra – vagy halmazokra való hivatkozással, vagy egy olyan séma segítségével, melyben egy nyitott mondattal határozzuk meg az összegzendő ill. szorzandó individuumok osztályát. Az utóbbi esetben az összeg léte a (ϕ nyitottmondatra a) következő módon mondható ki:

$$\exists x\phi \to \exists z \forall y(y\mathbf{O}z \leftrightarrow \exists x(\phi \wedge y\mathbf{O}x)) \tag{16}$$

Ha az (extenzionalitás miatt egyértelmű) összeget (mondjuk) $\sigma x\phi$-vel jelöljük, akkor a ϕ-t kielégítő individuumok szorzata a következő módon definiálható:

$$\pi x\phi =_{df} \sigma z \forall x(\phi \to z\mathbf{P}x) \tag{17}$$

2. Speciális részrelációk

Az irodalomban leggyakrabban előforduló speciális részrelációk a következők: komponens - objektum (funkcionális rész), csoport eleme - csoport, topológiai rész (térbeli tartalmazás), időtartamok részrelációja, folyamat (esemény) - részesemény (fázis), öszletdarab - öszlet, objektum anyaga - objektum, osztályok (halmazok) közti részreláció.

2.1. Mereotopológia

A mereológia topológiai irányú bővítései azért érdemelnek különös figyelmet, mert ezek a legkidolgozottabb olyan formális elméletek, melyek segítséget nyújthatnak a „kitüntetett rész" reláció (egy típusának) interpretációjához, azáltal, hogy megkísérlik axiomatizálni az összefüggés, illetve a nyitottság és a zártság fogalmát. A mereológia és a topológia összekapcsolása háromféle módon közelíthető meg: (i) a két elméletet egy szinten kezeljük, és nem próbáljuk meg definiálni az egyik elméletre támaszkodva a másik primitív terminusait (ii) topológiai fogalmakra támaszkodva definiáljuk a mereológiai fogalmakat (iii) a mereológia részeként építjük fel a topológiát.

Az első megközelítés ehhez hasonló axiómákkal dolgozik:

$$x\mathbf{C}x \tag{18}$$

$$x\mathbf{C}y \to y\mathbf{C}x \tag{19}$$

$$x\mathbf{P}y \to \forall z(z\mathbf{C}x \to z\mathbf{C}y) \tag{20}$$

ahol $\mathbf{C}$ az *összefüggés* relációja. $\mathbf{C}$ segítségével könnyen definiálható a *külső összefüggés*, az *érintő rész* és a *belső rész* is:

$$x\mathbf{EC}y \Leftrightarrow_{df} x\mathbf{C}y \wedge \neg x\mathbf{O}y \tag{21}$$

$$x\mathbf{TP}y \Leftrightarrow_{df} x\mathbf{P}y \wedge \exists z(z\mathbf{EC}x \wedge z\mathbf{EC}y) \tag{22}$$

$$x\mathbf{IP}y \Leftrightarrow_{df} x\mathbf{P}y \wedge \neg\mathbf{TP}y \tag{23}$$

Ezekből kiindulva a mereológiai műveletek segítségével pedig definiálhatók a kulcsfontosságú *belső*, *külső*, *lezárás* és *határoló* fogalmak:

$$ix =_{df} \sigma z(z\mathbf{IP}x) \tag{24}$$

$$ex =_{df} i(\sim x) \tag{25}$$

$$cx =_{df} \sim ex \tag{26}$$

$$bx =_{df} \sim (ix + ex) \tag{27}$$

valamint a szintén alapvető *összefüggő* objektum, illetve *erősen összefüggő* objektum fogalma:

$$\mathbf{SC}x \Leftrightarrow_{df} \forall y \forall z(x = y + z \to y\mathbf{C}z) \tag{28}$$

$$\mathbf{SSC}x \Leftrightarrow_{df} \mathbf{SC}x \wedge \mathbf{SC}ix \tag{29}$$

Emellett az „egyszintű” megközelítés mellett az a legfőbb érv, hogy a másik két irányzat elfogadhatatlanul reduktívnak tűnik: ha a mereológiát építjük a topológiára, pl. a részt az összefüggés reláció segítségével definiálva:

$$x\mathbf{P}y \Leftrightarrow_{df} \forall z(z\mathbf{C}x \to z\mathbf{C}y) \tag{30}$$

akkor elveszítjük azt a lehetőséget, hogy a részrelációt olyan területeken is értelmezhessük, ahol az összefüggés stb. topológiai fogalma nem interpretálható – az individuumok viszonyai nem redukálhatók téridőbeli viszonyaikkal.

Ha viszont a topológiai relációkat próbáljuk meg mereológiaikra redukálni régiók fölött való korlátozott kvantifikációval (az összefüggést olyan régiók átfedéseként definiálva, melyek közös része nem szükségképpen régió), akkor viszont annak áll fent a veszélye, hogy túlságosan leszűkítjük a topológiai relációk értelmezési tartományát.